Compléments d'Algèbre Linéaire : Résumé

Ce chapitre expose les points du programme de deuxième année, mais rappelle également, par souci de cohérence, quelques notions de base de première année.

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont définis sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0.
$\mathbb{K}$ désigne un corps de caractéristique nulle, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Familles libres, familles génératrices, bases

Définition 1 ***Combinaison linéaire***
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de cette famille tout vecteur de E de la forme : $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$, où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ à support fini, c'est-à-dire telle que l'ensemble $\{i \in I \ / \ \lambda_i \neq 0\}$ est une partie finie de I.

Notation 1
On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles d'éléments de $\mathbb{K}$ à support fini. $\mathbb{K}^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(I)}$.

Définition 2

- $(x_i)_{i\in I}$, famille de vecteurs de E, est libre si, et seulement si, quelle que soit la famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$,
$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E \Longrightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0).$$
- Les x_i, $i \in I$, sont linéairement indépendants si, et seulement si, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.
- Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

Remarque 1
On constate que :

- ▷ si I est fini, on retrouve les définitions de famille libre et de famille liée vue en première années ;
- ▷ $(x_i)_{i\in I}$, famille de vecteurs de E de cardinal quelconque, est libre si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies sont libres.

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Proposition 1

- Si une famille est libre, toute famille obtenue en permutant ses éléments est libre, le fait qu'une famille soit libre ne dépend pas de l'ordre de ses éléments.
- Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
- Toute famille contenant une famille liée est liée. (C'est la transposée de l'implication précédente). En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.
- Une famille de deux vecteurs est liée si, et seulement si, ces deux vecteurs sont colinéaires.
- Une famille non injective (autrement dit qui contient plusieurs fois le même élément) est liée.

✍

Proposition 2

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si, et seulement si, l'un au moins des x_i est combinaison linéaire des autres.

✍

Lemme 1

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Le sous-espace vectoriel engendré par $\{x_i,\ i \in I\}$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace de E qui contient cet ensemble, est l'ensemble des combinaisons linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Définition 3

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est une famille génératrice de E si, et seulement si, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{x_i,\ i \in I\})$ est E lui-même, c'est-à-dire si, et seulement si, tout élément de E est combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I}$.

Définition 4

Soit $e = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, il existe une unique famille $(x_i)_{i\in I}$ à support fini d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que :

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i.$$

Cette famille est appelée la famille des composantes ou des coordonnées du vecteur x dans la base e.

Exemple 1

- $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
- $((\delta_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n})_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Les bases de chacun de ces espaces vectoriels sont appelées leurs bases canoniques respectives.

Exemple 2

Pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1.
La famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une base, dite base canoniques, de cet espace vectoriel.

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Proposition 3
Si $\dim E = n$ et si e est dite famille de n vecteurs de E, alors il y a équivalence entre

1. e est une base de E
2. e est une famille libre
3. e est une famille génératrice de E.

Proposition 4
Étant donné deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de E et F est une base $(e_i)_{i\in I}$ de E et une famille $(f_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F, il existe une application linéaire u et une seule de E dans F, telle que :

$$\forall i \in I,\ u(e_i) = f_i.$$

Proposition 5
Soit $v = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille donnée de p vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Il existe une unique application linéaire u de $\mathbb{K}^p$ dans E telle que $\forall j \in [\![1, p]\!],\ u(\varepsilon_j) = u_j$. Cette application vérifie :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p,\ u(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i v_i;$$

$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_p)$. u est surjective si, et seulement si, v est génératrice ;
u est injective si, et seulement si, v est libre ;
u est bijective si, et seulement si, v est une base de E.

2 Somme et somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Définition 5
Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de ces sous-espaces vectoriels on note $\sum_{i=1}^{n} E_i$, le sous-espace vectoriel engendré par la réunion des E_i :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \operatorname{Vect}(\bigcup_{i=1}^{n} E_i).$$

Vocabulaire 1
L'application "somme de sous-espace vectoriels" est justifiée par la caractérisation suivante :

Proposition 6
$\sum_{i=1}^{n} E_i$ est l'ensemble des sommes de vecteurs des E_i autrement dit :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i,\ \text{où } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \ x \in E_i \right\}.$$

www.edukaty.fr
70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Définition 6
La somme des sous-espaces vectoriels de la famille $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe si, et seulement si :

$$\forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=0_E\Longrightarrow(\forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=0_E).$$

Lorsque cette condition est remplie, on note la somme de ces sous-espaces vectoriel : $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n}E_i$.

Proposition 7
La famille $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est en somme directe si, et seulement si, tout vecteur x de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}E_i$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \text{où}\quad (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$$

✍

Définition 7
Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E sont supplémentaires si, et seulement si, leur somme est directe et égale à E.
Dans ce cas, $E=\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n}E_i$.

Proposition 8
Tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire. ✍

Exemple 3
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, un polynôme P de degré $n+1$ étant donné, le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]P$, constitué des multiples de P, et le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égale à n sont supplémentaires : $\mathbb{K}[X]=\mathbb{K}_n[X]\oplus\mathbb{K}[X]P$.

Proposition 9
Les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E sont supplémentaires si, et seulement si :

$$\forall x\in E,\ \exists!(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_n\quad\text{tel que}\quad x=\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

✍

Proposition 10
Lorsque $E=\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n}E_i$, chaque vecteur x de E s'écrit, de manière unique :

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \text{où}\quad (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\in\prod_{i=1}^{n}E_i.$$

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, notons p_i l'application de E dans E définie par : $p_i(x)=x_i$. ✍

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

- $\triangleright$ $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i$ est un endomorphisme de E ;
- $\triangleright$ $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i \circ p_i = p_i$ (p_i est un projecteur) ;
- $\triangleright$ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)})$;
- $\triangleright$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E$.

Définition 8

La famille des $(p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est la famille des projecteurs de E associée à la décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Proposition 11

Si $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ alors, pour toute famille u_i d'application linéaires de E_i dans un espace vectoriel F, il existe une application linéaire unique u de E dans F telle que, pour tout i, u_i soit la restriction de u à E_i.

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E, de base respectives $b_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$.

Si la somme des $(E)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe, alors $b = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} b_i$ est une base de $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Si les $E_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, sont supplémentaires, alors $b = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} b_i$ est une base de E_i, dite base adaptée à la décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Corollaire 1

Sous les mêmes hypothèses, la somme des $(E)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est directe si, et seulement si,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i.$$

Corollaire 2

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
2. Les $(E)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont en somme directe et $\dim E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.
3. $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ et $\dim E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim E_i$.

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Corollaire 3
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Définition 9
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, une base de E est adaptée à F lorsque ses premiers vecteurs forment une base de F.

3 Image et noyau d'une application linéaire

Théorème 2
Une application linéaire u de E dans F induit un isomorphisme de tout supplémentaire du noyau de u dans son image si E' est un supplémentaire de $\ker u$ dans F la restriction à E' et corestriction à $\operatorname{Im} u$ est un isomorphisme.

Théorème-Définition 1 ***Interpolation de Lagrange***
Soit $n+1$ éléments fixes, distincts deux à deux, $a_0, \ldots, a_n$ de $\mathbb{K}$.
L'application u de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ définie par :

$$u(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n))$$

est une application linéaire.
Le noyau de u est constitué des constitué des multiples du polynôme $N = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$: $\ker u = \mathbb{K}[X]^N$.
En outre, u un endomorphisme u de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
par conséquent, pour chaque $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ donnée il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{K}[X]$ de degré $\leqslant n$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!],\ L(a_i) = \lambda_i$.
L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $(P(a_0), \ldots, P(a_n)) = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ est $1 + \mathbb{K}[X]N$.

Définition 10
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose :

$$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{j \in [\![0,n]\!],\ j \neq i} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{j \in [\![0,n]\!],\ j \neq i} (a_i - a_j)}.$$

Les polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ sont des polynômes de Lagrange $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Ils sont tous de degré n.

Proposition 12
La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Elle vérifie : pour tout (i, j) de $[\![0, n]\!]^2$, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.
$(\lambda_i)_{i \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1}$ étant donné, l'unique polynôme L de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout i de $[\![0, n]\!]$, $L(a_i) = \lambda_i$, est donné par la formule ✍

www.edukaty.fr
70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

$$L = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i.$$

Lemme 2
Étant donné un sous-espace vectoriel E' de E et deux sous-espace supplémentaires F_1 et F_2 de E' dans E, le projecteur de E sur F_1 parallèlement à E' définit un isomorphisme de F_2 sur F_1.

Définition 11 ***Codimension***
Soit E un espace vectoriel. Soit E' un sous-espace vectoriel de E.
D'après la proposition précédente, les supplémentaires de E' dans E sont deux à deux isomorphes.
On est donc dans une et une seule des deux situations suivantes :

- ou bien aucun supplémentaire de E' dans E n'est de dimension finie ;
- ou bien tous les supplémentaires de E' dans E sont de dimension finie, et alors ils ont tous la même dimension.

Dans le second cas, cette dimension commune à tous les supplémentaires est appelée la codimension de E' dans E et notée $\mathrm{codim}_E(E')$.

Exemple 4

▷ E lui-même est de codimension nulle.

▷ $\{0\}$ est de codimension finie si, et seulement si, E est de dimension finie, et lorsque ceci est vérifié, $\mathrm{codim}_E(\{0\}) = \dim(E)$.

▷ Soit P est un polynôme de degré $n+1$ fixé. $\mathbb{K}[X]P$ est un sous-espace de codimension finie de $\mathbb{K}[X]$, et sa dimension est $n+1$.

Définition 12
On dit que H est un hyperplan de E lorsque H est un sous-espace vectoriel de codimension 1 de E.
Ainsi, un hyperplan de E est un sous-espace H de E qui admet un sous-espace supplémentaire qui soit une droite vectorielle (ou, ce qui est équivalent, dont tous les supplémentaires sont des droites vectorielles).

Remarque 2
Cette définition est valable que E soit de dimension finie ou non.

Proposition 13
On suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel E' de E est de codimension finie, et $\mathrm{codim}_E(E') \leqslant \dim(E) - \dim(E')$.

Définition 13
Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image

$$\dim \mathrm{Im}\, u = \mathrm{rg} u$$

Proposition 14
E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont $e = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base et u étant une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]} \quad \text{et } \operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$$

Définition 14 ***Théorème du rang***
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et u une application linéaire de E dans F. Alors u est de rang fini si, et seulement si, $\ker u$ est de codimension finie dans E ; et , lorsque ceci est vérifié, $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{codim}_E(\ker(u))$.

Corollaire 4
u étant une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F, on a

1. Si F est de dimension finie, alors $\ker(u)$ est de codimension finie et $\operatorname{codim}_E(\ker(u)) = \operatorname{rg}(u)$.
2. Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et on a $\dim E = \dim(\ker(u)) + \operatorname{rg}(u)$.

Corollaire 5
u étant une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, E et F, u est un isomorphisme de E dans F si, et seulement si, $\operatorname{rg} u = \dim E = \dim F$.

Corollaire 6
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et u un élément de $\mathcal{L}(E,F)$. Lorsque : $\dim E = \dim F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u est bijective
2. u est injective
3. u est surjective

Corollaire 7
Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$:

- si u est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$;
- si v est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$;

Ainsi, on ne change pas le rang d'une application linéaire si on la compose avec un isomorphisme.

4 Dualité en dimension finie

Définition 15
Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans son corps de base $\mathbb{K}$, considéré comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème-Définition 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de E dans $\mathbb{K}$. $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est noté E^* et appelé l'espace dual de E.

Proposition 15
Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si, et seulement si, il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E. ✍

Proposition 16
Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si, et seulement si, elles sont colinéaires. ✍

Proposition 17
Soit n un entier non nul, si E est un espace vectoriel de dimension n, un sous-espace vectoriel H est un hyperplan de E, si, et seulement si, $\dim H = n-1$. ✍

Théorème 3
Soit n un entier naturel non nul, E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $e = (e_i)_{i\in[\![1,n[\![}$ et H un sous-espace vectoriel de E.
H est un hyperplan de E si, et seulement si, il existe n scalaire $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ non tous nuls tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ est alors une équation de H dans la base e ou une équation cartésienne de H dans e.

Exemple 5

- Les hyperplans de $\mathbb{K}^2$ sont les droites vectorielles. Une sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ est une droite vectorielle si, et seulement si, il admet une équation de la forme : $ax+by = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
- Les hyperplans de $\mathbb{K}^3$ sont les plans vectoriels. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ est un plan vectoriel si, et seulement si, il admet une équation de la forme : $ax+by+cz = 0$, où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$.

Proposition 18
Étant donné un vecteur e non nul d'un espace vectoriel E de dimension finie n, il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(e) = 1$. ✍

Corollaire 8
Le vecteur nul est le vecteur de E sur lequel toute forme linéaire s'annule.

Théorème-Définition 3 ***Base duale***
Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Alors, pour chaque vecteur x de E, il existe un unique $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$.
$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont n formes linéaires, dites formes linéaires coordonnées associée à B. $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base B^* de E^*, appelée base duale de B. La dimension de E^* est égale à n.
Dans ces conditions, B et B^* vérifient les relations d'orthogonalisation de Kronecker : $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j} = 1$ si $j = i$ et $\delta_{i,j} = 0$. Sinon.

Notation 2

On note souvent $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

Proposition 19

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Étant donné une base L de E^*, il existe une unique base B de E telle que $L = B^*$. On l'appelle la base anté-duale de L. ✍

Proposition 20

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension p de E, l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n - p$. ✍

Proposition 21

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Si $\Phi = (\varphi_1, \varphi_1, \dots, \varphi_q)$ est une famille libre de forme linéaires sur E, l'intersection des noyau respectifs H_i des formes linéaires φ_i est un sous-espace vectoriel F de dimension $n - q$ de E. Toute forme linéaire s'annulant sur F est combinaison linéaire de $(\varphi_1, \varphi_1, \dots, \varphi_q)$. ✍

5 Trace d'un endomorphisme

Définition 16

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A, et on note $\mathrm{Tr}(A)$, le scalaire

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 22 ***Propriétés de la trace d'une matrice***

- L'application "trace" est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(M)$ (deux matrices semblables ont la même trace).

✍

Proposition 23 ***Trace d'un endomorphisme en dimension finie***

Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie E, la trace d'une matrice représentant u est indépendante de la base de référence.
Cette valeur commune est la trace de l'endomorphisme u. ✍

Proposition 24 ***Trace d'un projecteur***

La trace d'un projecteur est égale à son rang. ✍

6 Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires

Changement de bases

Définition 17
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, muni de deux base $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$. La matrice de passage de la base e à la base e' est la matrice carrée $P = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$, c'est-à-dire : la $j^{\text{ième}}$ colonne de P est formée par les coordonnées du $j^{\text{ième}}$ de la base e' dans e. On la note $P(e \to, e')$.

Proposition 25
La matrice de passage de la base e à la base e' est inversible. Son inverse est la matrice de passage dans la base e' à la base e.

Proposition 26 ***Formule de changement de base pour un vecteur***

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ et si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sa matrice-colonne en base e et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ sa matrice colonne en base e', alors :

$$X = P(e \to e')X'$$

Proposition 27 ***Formule de changement de base pour la matrice d'une application linéaire***
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases e et e' et $P(e \to e')$ la matrice de passage de e à e'.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases f et f' et $P(f \to f')$ la matrice de passage de f à f'.
Soit u une application linéaire de E dans F. Alors :

$$Mat(u; e', f') = [P(f \to f')]^{-1} Mat(u; e, f) P(e \to e').$$

Corollaire 9
Si $E = F$ et u est un endomorphisme de E, on a :

$$Mat(u; e') = [P(e \to e')]^{-1} Mat(u; e) P(e \to e').$$

Équivalence des matrices

Définition 18 ***Matrices équivalentes***
Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que : $B = Q^{-1}AP$.

Remarque 3 ***Matrices équivalentes***
La relation ainsi définie est effectivement une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1. Une matrice est équivalente à elle même.

www.edukaty.fr
70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

2. Si A et B sont équivalentes, alors B et A sont équivalentes.

3. Si AA et B sont équivalentes et si B et C sont équivalentes alors, alors A et C sont équivalentes.

Proposition 28 ***Caractérisation géométrique de l'équivalence de deux matrices***
Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels fixés, de dimension respectives p et n, A et B sont équivalentes si, et seulement si, il existe $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et des bases e et e' de E, f et f' de F telles que $A = Mat(u; e, f)$ et $B = Mat(u; e', f')$. ✍

Rappel 1
Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre ; le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

Définition 19 ***Rang d'une matrice***
Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Remarque 4
Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r est son rang, on a nécessairement $r \leqslant p$ et $r \leqslant n$..

Proposition 29 ***Liens entre les rang d'une famille de vecteurs et d'une application linéaire et ceux de leurs matrices***
Étant donné une base e de E, le rang de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs de E est égal au rang de la matrice $M_e(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de cette famille en base e.
Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, pour toute application linéaire u de E dans F, le rang de u est égal au rang de $Mat(u; e, f)$, où e est une base de E et e une base de F.
✍

Définition 20
Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice canonique de rang r est la matrice $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right)$, c'est-à-dire : $J_r = (\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$ où $\alpha_{i,j} = 1$ si $1 \leqslant i = j \leqslant r$ et $\alpha_{i,j} = 0$ sinon.

Proposition 30
Une matrice $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, si et seulement si, elle est équivalente à J_r. ✍

Théorème 4 ***Caractérisation de l'équivalence des matrices à l'aide du rang***
Soit A et B deux matrices éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A et B son équivalente si, et seulement si, $\text{rg}A = \text{rg}B$.

Corollaire 10
Une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son rang est n.

Proposition 31 ***Invariance du rang par transposition***
Si A appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang de ${}^tA$ est égal au rang de A. ✍

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

Dans cette sous-section, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 21
On appelle opération élémentaires sur les lignes les opérations d'un des trois types suivants :

- addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne, que l'on code : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$;
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, que l'on code : $L_i \leftarrow \alpha L_i$;
- échange de deux lignes , que l'on code : $L_i \leftarrow L_j$.

Proposition 32 ***Interprétation en terme de produit par une matrice inversible***

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ correspond à la multiplication à gauche par la matrice inversible $B_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ (matrice obtenue à partir de la matrice unité en ajoutant λ en position (i, j)).
- Soit $\alpha \neq 0$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$ correspond à la multiplication à gauche par la matrice inversible $D_i(\alpha) = I_n - E_{i,i} + \alpha E_{i,i}$ (matrice obtenue à partir de la matrice unité en remplaçant par α le 1 en position (i, i)).
- $L_i \leftrightarrow L_j$ correspond à la multiplication à gauche par $\Omega_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ (matrice obtenue à partir de la matrice unité en remplaçant 0 par les 1 en position (i, i) et (j, j) et ajoutant 1 en positions (i, j) et (j, i)).

Remarque 5
$\det B_{i,j}(\lambda) = 1, \ \det D_i(\alpha) = \alpha, \ \det \Omega_{i,j} = -1$

Remarque 6
On considère, de même les opérations élémentaires sur les colonnes : addition d'un multiple d'une colonne à une autre colonne, multiplication d'une colonne par un scalaire non nul, échange de deux colonnes.

Proposition 33 ***Opérations élémentaires sur les colonnes***

- L'addition à la i-ème colonne de λ fois la j-ième colonne, que l'on note $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ correspond à la multiplication à droite par la matrice $I_p + \lambda E_{j,i} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.
- Soit $\alpha \neq 0$, la multiplication par α de la i-ème colonne, que l'on note $C_i \leftarrow \alpha C_i$, correspond à la multiplication à droite par la matrice $I_p - E_{i,i} + \alpha E_{i,i} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.
- L'échange des i-ème et j-ième colonnes, que l'on note $C_i \leftrightarrow C_j$, correspond à la multiplication à droite $I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.

Théorème 5 ***Méthode du pivot***
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ non nulle, il existe $r \in [\![1, \min(n,p)]\!]$ et une séquence (ou "suite finie") d'opérations élémentaires qui conduit de A à la matrice J_r. Il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = UJ_rV$. On a alors :

- Le rang des A est r.
- Si $n = p$, le déterminant de A est nul si $r < n$, est égal à $\det U$ et $\det V$ si $r = n$.
- Si $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors l'équation linéaire $AX = B$, à l'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, équivaut à $J_rVX = U^{-1}B$.

Proposition 34 ***Inversion d'une matrice carrée par la méthode du pivot de Gauss***
Soit A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; s'il existe une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de A qui la transformation en la matrice unité I_n, alors A est inversible et la même suite d'opérations (dans le même ordre) appliquée à I_n livre la matrice A^{-1}. ✍

Remarque 7
On a le même résultat avec une suite finie d'opération élémentaires sur les colonnes.

Équations linéaires

Définition 22
Une équation linéaire est une équation de la forme $(*)$ $u(x) = b$, où :

- u est une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans $\mathbb{K}$-espace vectoriel F ;
- b est un vecteur de F, appelé second membre de l'équation ;
- l'inconnue x est un vecteur de E.

L'équation $u(x) = 0_F$ est appelée l'équation homogène (ou sans second membre) associée à l'équation $u(x) = b$.

Proposition 35
Avec les notations précédentes, soit S l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = b$. Alors :

- ou bien $b \notin \operatorname{Im} u$ et alors S est l'ensemble vide ;
- ou bien $b \in \operatorname{Im} u$ et alors S est le sous-espace affine $x_0 + \ker u$, où x_0 est un élément fixé de S (c'est-à-dire une solution particulière de l'équation).

✍

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Systèmes d'équations linéaires et matrices

Proposition 36 ***Écriture matricielle des systèmes d'équations linéaires***
Considérons le système de n équations linéaire à p inconnues :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & \vdots & & + & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Notons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice des coefficients de (S) et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne second membre. On a l'équivalence :

$$(S) \Longleftrightarrow AX = B$$

Définition 23 : ***Vocabulaire***
La matrice A est appelée matrice du système. Le rang d'un système linéaire est le rang de sa matrice.
Comme l'application $u : X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est linéaire :

$$AX = B \Leftrightarrow u(X) = B.$$

Un système linéaire est une équation linéaire, dont l'équation homogène associée, appelée système homogène associée, est :

$$AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}.$$

Remarque 8
Application de la dualité à l'étude d'un système d'équation linéaire. Avec les notations précédentes, notons, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, φ_i la forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$ définie par : $\varphi_i(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j$. Alors : x est solution de (S) si et seulement si : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_i(x) = b_i$.

Proposition 37 ***Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire***
Si l'ensemble solution d'un système linéaire n'est pas vide, c'est-à-dire un sous-espace affine de dimension $p - r$, où p est son nombre d'inconnues et r son rang.

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Compléments d'Algèbre Linéaire : Qcm

Notations. Dans les questions qui suivent, sauf mention contraire, E désigne un espace vectoriel réel quelconque. On note classiquement $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u^2 = -\mathrm{Id}$, que vaut $(u^2 + u)^2$?

❒ a. $-2\mathrm{Id}$ ❒ b. $-2u$ ❒ c. $2\mathrm{Id} - 2u$ ❒ d. 0

2. Laquelle des applications suivantes est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

❒ a. $f_1 : (x, y) \mapsto x$
❒ b. $f_2 : (x, y) \mapsto xy$
❒ c. $f_3 : (x, y) \mapsto x + y + 1$
❒ d. $f_4 : (x, y) \mapsto (x + y)(x - y)$

3. Laquelle des parties suivantes n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

❒ a. l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$
❒ b. l'ensemble des fonctions paires
❒ c. l'ensemble des fonctions croissantes
❒ d. l'ensemble des fonctions polynomiales

4. Soit u un endomorphisme de E. Quelle propriété est toujours vérifiée ?

❒ a. $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}\, u^2$
❒ b. $\mathrm{Im}\, u^2 \subset \mathrm{Im}\, u$
❒ c. $\mathrm{Im}\, u^2 \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$
❒ d. $E = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, u^2$

5. Lequel des ensembles suivants est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?

❒ a. l'ensemble des projecteurs
❒ b. l'ensemble des symétries
❒ c. l'ensemble des homothéties
❒ d. l'ensemble des automorphismes de E

6. Laquelle des applications suivantes est un projecteur de $\mathbb{R}^2$?

❒ a. $p_1 : (x, y) \mapsto (y, x)$
❒ b. $p_2 : (x, y) \mapsto (1, 0)$
❒ c. $p_3 : (x, y) \mapsto (0, x)$
❒ d. $p_1 : (x, y) \mapsto (0, y)$

7. Soit F un sous-espace vectoriel de E, u un endomorphisme de E, et v la restriction de u à F. Alors

❒ a. $v \in \mathcal{L}(F)$
❒ b. $v \in \mathcal{L}(F, E)$
❒ c. $v \in \mathcal{L}(E, F)$
❒ d. v n'est pas forcément linéaire

8. Soit g non nulle dans $\mathcal{L}(E)$. Laquelle des applications suivantes de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ n'est pas linéaire ?

❒ a. $f \mapsto g \circ f$
❒ b. $f \mapsto f \circ g$
❒ c. $f \mapsto f + g$
❒ d. $f \mapsto g \circ f \circ g$

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

9. Lequel des sous-ensembles suivants de $\mathscr{L}(E)$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$?

❒ a. l'ensemble des projecteurs
❒ b. l'ensemble des symétries
❒ c. l'ensemble des endomorphismes non nuls
❒ d. l'ensemble des homothéties

10. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$. Lequel des sous-espaces suivants n'est pas un supplémentaire de la droite $\text{Vect}(e_1)$?

❒ a. $F_1 = \text{Vect}(e_2, e_3)$
❒ b. $F_2 = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_1 + e_3)$
❒ c. $F_3 = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$
❒ d. $F_4 = \text{Vect}(e_2 + e_3, e_2 - e_3)$

Notations. Dans toutes les questions, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel réel de dimension finie.

11. Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. La dimension de $E \times F$ est

❒ a. $\dim E + \dim F$
❒ b. $\dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$
❒ c. $\dim E \times \dim F$
❒ d. $\max(\dim E, \dim F)$

12. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Quelle affirmation est vraie ?

❒ a. toute base de E contient une base de F
❒ b. toute base de F est contenue dans une base de E
❒ c. toute famille génératrice de E contient une famille génératrice de F
❒ d. toute base de E contient une famille génératrice de F

13. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. Laquelle des conditions suivantes assure que x_n est combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_{n-1}$?

❒ a. la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée
❒ b. la famille $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est libre
❒ c. la famille $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est libre et la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée
❒ d. la famille $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est liée et la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre

14. Soit e_1, e_2, e_3, e_4 des vecteurs de E. On suppose que les familles (e_1, e_2, e_3) et (e_3, e_4) sont libres. La dimension de E est forcément supérieure ou égale à

❒ a. 2 ❒ b. 3 ❒ c. 4 ❒ d. 5

15. Soit F, G deux sous-espaces de E. Avec quelle hypothèse peut-on trouver à coup sûr un vecteur non nul dans $F \cap G$?

❒ a. F et G sont supplémentaires dans E
❒ b. $\dim F + \dim G = \dim E$
❒ c. $\dim F + \dim G > \dim E$
❒ d. $\dim F = \dim G$

16. Soit F et G deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. La dimension p de $F \cap G$ peut valoir

❒ a. 1 ou 2
❒ b. 1, 2 ou 3
❒ c. 0, 1 ou 2
❒ d. 0, 1, 2 ou 3

www.edukaty.fr
70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

17. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et f une forme linéaire sur E. Une matrice qui représente f possède

❒ a. n lignes et n colonnes
❒ b. n lignes et une colonne
❒ c. une ligne et n colonnes
❒ d. une ligne et une colonne

18. Soit s une symétrie de E (i.e. un endomorphisme vérifiant $s^2 = \mathrm{Id}$) et $\mathscr{B}$ une base quelconque de E. La matrice de s dans la base $\mathscr{B}$ est

❒ a. symétrique
❒ b. diagonale
❒ c. triangulaire
❒ d. inversible

19. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si on calcule BA avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cela revient à

❒ a. rajouter à la première ligne de A la seconde ligne multipliée par 2
❒ b. rajouter à la première colonne de A la seconde colonne multipliée par 2
❒ c. rajouter à la seconde ligne de A la première ligne multipliée par 2
❒ d. rajouter à la seconde colonne de A la première colonne multipliée par 2

20. Soit E l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'endomorphisme f de E défini par $f(P) = P(X) - P(X-1)$. La matrice de f dans la base canonique de E est :

❒ a. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
❒ b. $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
❒ c. $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
❒ d. $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21. Soit A une matrice carrée réelle de taille $n \geqslant 1$. On suppose que les p premières colonnes de A sont nulles, les suivantes étant non nulles. Alors on a forcément

❒ a. $\mathrm{rg}A = p$
❒ b. $\mathrm{rg}A = n - p$
❒ c. $\mathrm{rg}A \leqslant n - p$
❒ d. $\mathrm{rg}A \geqslant n - p$

22. Soit E un espace vectoriel dont (e_1, e_2, e_3) est une base. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(e_1) = e_2, u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = e_1$. La matrice de u dans la base $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est

❒ a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
❒ b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
❒ c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
❒ d. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

23. Soit u un isomorphisme entre deux espaces vectoriels réels E et F (de même dimension $n \geqslant 1$). Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Combien y a-t-il de bases $\mathscr{B}'$ de F telles que la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ soit la matrice identité ?

❒ a. aucune sauf si $u = \mathrm{Id}$
❒ b. une seule
❒ c. 2^n
❒ d. toutes les bases conviennent

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Compléments d'Algèbre Linéaire : Exercices

Cette feuille est constituée d'exercices sélectionnés par l'équipe encadrante d'eDukaty, parmi des sources diverses: ouvrages de référence, feuilles d'exercices de professeurs de prépa, sites internet, etc. Elle doit être abordée après une bonne connaissance du cours. Les exercices plus délicats sont accompagnés des symboles (⋆) ou (⋆⋆). Les exercices dits "Classiques" doivent absolument être travaillés. Le cas échéant, leur solution doit être lue et parfaitement comprise. Enfin, le préparationnaire vérifiera qu'il sait les refaire au propre.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1
Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(0) = P(2)\}$;
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P'(0) = 2\}$;
3. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non-nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ A|P\}$;
4. $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables;
5. E_4, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a \in \mathcal{D}$.
6. E_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, où $a \in \mathcal{D}$.

Exercice 2 ⋆ *Classique*
Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $F \cup G$ est encore un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 3 ⋆ *Classique*
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (i.e $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (i.e $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 4
Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non-nul et $F = \{P \in \mathbb{R}[X];\ A \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et trouver un supplémentaire à F.

Exercice 5 ⋆⋆
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On désigne par F le sous-espace des fonctions constantes et par G_a le sous-espace des fonctions qui s'annulent en a. Montrer que F et G_a sont supplémentaires dans E.
2. Plus généralement, soient $a_0, \dots, a_N$ des éléments distincts de $\mathbb{R}$ et $G = \{f \in E;\ f(a_0) = \dots = f(a_N) = 0\}$. Trouver un supplémentaire à G.

Exercice 6 ⋆
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que $F' \oplus G = E$.

Familles libres - liées - génératrices - Bases

Exercice 7 *Classique*
Soit $(P_2, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls, à degrés échelonnés, c'est-à-dire $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$. Montrer que $(P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre.

Exercice 8 ⋆⋆
Démontrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $(x \mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$;
2. $(x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$;
3. $(x \mapsto \cos(ax))_{a>0}$;
4. $(x \mapsto (\sin x)^n)_{n\geq 1}$.

Exercice 9
Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1,1]$ qui sont affines sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$.
Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 10
On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x+y=0 \ \text{ et } \ x+z=0\}.$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$ et $u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille (u_1,u_2,u_3) est-elle libre ?
4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Exercice 11 $\star$
Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et a, b deux réels distincts. On désigne par F l'ensemble des polynômes de E dont a et b sont racines. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.

Applications linéaires

Exercice 12 $\star$
Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E.
Montrer que G et $\mathrm{Im}(f)$ sont isomorphes.

Exercice 13 $\star$
Soient E et F deux K-espaces vectoriels et f appartient à $\mathcal{L}(E,F)$.

1. On suppose qu'il existe g appartenant à $\mathcal{L}(F,E)$ telle que $f \circ g = Id_F$. Montrer que f est surjective.
2. On suppose que f est surjective. On admet l'existence d'une sous-espace vectoriel G de E tel que $G \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

   a. Soit $\widehat{f} : G \to F, x \mapsto f(x)$. Montrer que $\widehat{f}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

   b. Soit $g : F \to E, y \mapsto \widehat{f}^{-1}(y)$. Calculer $f \circ g$.
3. Conclure.

Exercice 14 $\star\star$ *Classique*
Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que f est une homothétie.

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Exercice 15 ⋆⋆

Dans cet exercice, on admet que dans tout espace vectoriel, un sous-espace admet un supplémentaire. Soient E, F deux espaces vectoriels et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \iff \exists f \in \mathcal{L}(F) \text{ tel que } \; v = f \circ u.$$

Exercice 16 ⋆⋆

Dans cet exercice, on suppose connue la propriété suivante : si E_1 est un espace vectoriel et F_1 est un sous-espace vectoriel de E_1, alors il possède un supplémentaire. Soient alors E, F, G trois espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, G)$. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$;

ii) Il existe $w \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $v = u \circ w$.

Symétrie et projections

Exercice 17 ⋆ *Classique*

Soit E un K-ev, et $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un *projecteur* si $p \circ p = p$.

1. Étude individuelle

   a. Montrer que pour tout $y \in \mathrm{Im}(p)$, alors $p(y) = y$.
   En déduire que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
   On dit que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

   b. On suppose désormais que E est de dimension finie. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle p a pour matrice

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \\ & & \ddots & & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

   En déduire que la trace d'un projecteur est égal à son rang.

2. Étude collective. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E_1 \oplus \dots E_p = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_j$. Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et $p_1 + \dots + p_n = Id_E$.

Exercice 18

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \neq 0, q \neq 0$ et $p \neq q$.
Démontrer que (p, q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 19 ⋆ *Classique*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. Montrer que, dans ce cas, on a $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q$.

Exercice 20

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soient α, β deux réels distincts.

1. Démontrer que $E = \mathrm{Im}(f - \alpha Id_E) + \mathrm{Im}(f - \beta Id_E)$.
   On suppose de plus que
   $$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = 0.$$

2. Démontrer que f est inversible, et calculer f^{-1}.

3. Démontrer $E = \mathrm{Ker}(f - \alpha Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \beta Id_E)$.

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

4. Exprimer en fonction de f le projecteur p sur $\text{Ker}(f - \alpha Id_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f - \beta Id_E)$.

Exercice 21 $\star$
Soit E un espace vectoriel de dimension n. On souhaite démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition un matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'un projecteur de E.
2. En déduire que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$, les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont des matrices de projecteurs.
3. Démontrer la propriété annoncée.

Applications linéaires sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 22 $\star$
Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 23 $\star$
Montrer que $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad P \mapsto P - XP'$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 24
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\ker(u)$.
4. Montrer que $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 25 *Classique*
On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'inscrivent sous la forme $\lambda \cos + \mu \sin$ avec λ et μ réels.

1. Montrer que E est un espace vectoriel. En donner une base et calculer sa dimension.
2. Montrer que la dérivation des fonctions de la variable réelle définit une application de E dans E. On note D cette application.
3. Rappeler les résultats vus au lycée permettant d'affirmer que D est un endomorphisme.
4. Donner la matrice de D dans la base trouvée en 1.
5. Montrer que D est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour tout vecteur v de E, il existe un unique vecteur u de E tel que $Du = v$.
6. Montrer qu'on peut alors construire un isomorphisme D^{-1} de E tel que, pour tout vecteur u de E on a $D(D^{-1}(u)) = u$ et $D^{-1}(D(u)) = u$.
7. Donner la matrice de D^{-1} dans la base trouvée en 1.

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Exercice 26 ⋆⋆ *Classique*
Le but de cet exercice est l'étude de l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par
$(\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Question préliminaire : soit (P_n) une famille de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour chaque n, $\deg(P_n) = n$. Prouver que (P_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que Δ est une application linéaire. Calculer son noyau et sont image.
3. Montrer qu'il existe une unique famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $H_0 = 1$, $\Delta(H_n) = H_{n-1}$, et $H_n(0) = 0$. Montrer que (H_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Montrer que P peut s'écrire
$$P = \sum_{n=0}^{p} (\Delta^n P)(0) H_n.$$
5. Montrer que l'on a $(\Delta^n P)(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k P(k)$.
6. Montrer que pour tout n, $H_n = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.
7. En déduire que, pour tout polynôme P de degré p, les assertions suivantes sont équivalentes :
   i. P prend des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$.
   ii. P prend des valeurs entières sur $\{0, \dots, p\}$.
   iii. Les coordonnées de P dans la base (H_n) sont des entiers.
   iv. P prend des valeurs entières sur $p+1$ entiers consécutifs.

Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 27 ⋆
Démontrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice 28 ⋆⋆
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p < n$. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.

Dimension finie et application linéaires

Exercice 29
Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Exercice 30
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0$.

Exercice 31 *Classique*
Soit E un espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

Exercice 32 ⋆ *Classique*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si E est de dimension paire.

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com

Exercice 33 $\star$
Soient $E_0, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels de dimensions finies respectivement égales à $a_0, \ldots, a_n$.
On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, \ldots, f_{n-1}$ telles que, pour chaque
$k \in 0, \ldots, n-1$, f_k est application linéaire et

(i) f_0 est injective;

(ii) $\ker(f_k) = \mathrm{Im}(f_{k-1})$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$;

(iii) f_{n-1} est surjective.

Prouver que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = 0$.

Matrices

Exercice 34 $\star$ *Classique*

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ si $i \leq j$, $a_{i,j} = 0$ sinon.

1. Interpréter A comme la matrice d'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 35 $\star\star$ *Classique*
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire que pour tout
$i \in \{1, \cdots, n\}$, on a $|a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{j \neq i} a_{i,j}$. Montrer que la matrice A est inversible.

Exercice 36 *Classique*
Soit $n \geq 1$. Pour $(i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne qui vaut 1.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.
2. En déduire quelles sont les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 37
Soit E le sous ensembles de $M_3(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices.
Calculer $\dim(E)$.

Exercice 38 $\star$ *Classique*
Montrer que l'ensemble des matrices symétriques ($A =^t A$) et l'ensemble des matrices anti-symétriques ($A = -^tA$) sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 39 $\star$
Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

Exercice 40 $\star\star$ *Classique*

1. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Exercice 41 $\star$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^k = 0$ pour un entier k. Montrer qu'il existe en fait $m \leq n$ avec $A^m = 0$.

2. Existe-t-il une matrice complexe A dont le carré soit égal à la matrice suivante ?

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 42 $\star\star$
Soit A et B deux matrices vérifiant $A+B = AB$. Montrer que $(I-A)$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 43 $\star\star$
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Déterminer une CNS pour que M soit inversible et que son inverse soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
Indication : on s'intéressera au déterminant de M.

70 Rue Mademoiselle, 75015 Paris
01 43 48 83 36
contact@edukaty.com